

# Effiziente kinematische Verarbeitung von Zusammenbauten in feature-basierten CAD-Systemen

Stefan Klein, Andr s Kecskem thy  
Institut für Mechanik, Technische Universität Graz

Jens Bathelt, Fabian Collenberg, Georges R gnault  
Precisionsoft AG, Au/Zürich

30. Juli 1997

---

## Zusammenfassung

CAD-Systeme sind konzeptionell auf die geometrische Ausgestaltung von Bauteilen (solid modelling) sowie deren Fixierung zur Erfüllung geometrischer Abhängigkeiten zwischen ihnen (assembly) ausgerichtet. Eine Bewegungssimulation, bei der ein Benutzer die noch nicht festgelegten Freiheitsgrade einer Konstruktion steuern kann, ist derzeit bei CAD-Systemen nicht möglich. Solche Bewegungsanalysen wären jedoch wünschenswert, da sie zu einem kürzeren Konstruktionszyklus und damit zu billigeren und innovativeren Entwürfen führen könnten.

Die Abbildung von geometrischen Abhängigkeiten zwischen den Bauteilen einer Konstruktion auf eine  quivalente kinematische Struktur bietet die Möglichkeit, eine effiziente Berechnung für eine Bewegungssimulation mit erprobten Methoden aus dem Bereich der Mehrk rpermodellierung auch für komplexe Zusammenbauten durchzuführen.

## 1 Bindungsbasierte Beschreibung einer CAD-Konstruktion

Ein CAD-Zusammenbau besteht aus einer Menge von Bauteilen („*Körpern*“) mit bestimmten geometrischen Abmessungen und einer Menge von *geometrischen Bindungen*, welche die relative Lage von K rperketten einschränken bzw. festlegen.

Jedem Körper  $\mathcal{B}_i$  wird ein eigenes körperfestes Koordinatensystem  $\mathcal{K}_i$  zugeordnet. Die geometrischen Bindungen werden definiert zwischen geometrischen *Bezugsobjekten* (BO), siehe Tabelle 1, welche an den Zielk rpern identifiziert bzw. angeheftet werden. Als eine günstige Auswahl von geometrischen Bindungen hat sich die in Tabelle 2 angegebene Liste herausgestellt. Die geometrischen Bindungen sperren entweder jeweils eine gewisse Anzahl von translatorischen (T) oder rotatorischen (R) Freiheitsgraden („zweiseitige Bindungen“) oder sie schränken die Werte einer gewissen geometrischen Abmessung einseitig ein („einseitige Bindung“). Während erstere damit zu Bindungsgleichungen führen, ergeben letztere Ungleichungen, die mit geeigneten Verfahren behandelt werden müssen.

Die Beschreibung eines CAD-Zusammenbaus erfolgt durch einen „*Constraintgraphen*“, dessen Knoten zum einen die Körperkoordinatensysteme und zum anderen die obengenannten Bezugsobjekte und dessen Kanten die Lage der Bezugsobjekte bzgl. der zugehörigen Körperkoordinatensysteme bzw. die geometrischen Bindungen repräsentieren.

BO	Bezeich.	Beschreibung
<b>Punkt</b>	$P$	Gibt die Koordinaten eines Punktes an.
<b>Vektor</b>	$V$	Gibt die Komponenten eines Vektors an.
<b>Achse</b>	$A$	Ein Paar $(V_A, P_A)$ bestehend aus dem Vektor $V_A$ und dem Punkt $P_A$ , welches die Gerade durch $P_A$ parallel zu $V_A$ beschreibt.
<b>Ebene</b>	$E$	Ein Paar $(V_E, P_E)$ bestehend aus dem Vektor $V_E$ und dem Punkt $P_E$ , welches die Ebene durch $P_E$ normal zu $V_E$ beschreibt.
<b>Koordinatensystem</b>	$K$	Beschreibt ein Koordinatensystem.

Tabelle 1: Bezugsobjekte

Bindungs-Typ	T	R	Beschreibung
<b>coincident</b> $(P_1, P_2)$	3	0	Die beiden Punkte $P_1$ und $P_2$ sollen übereinstimmen.
<b>distance</b> $(P_1, P_2, d)$	1	0	Der Abstand zwischen den Punkten $P_1$ und $P_2$ soll $d$ betragen, $d > 0$ .
<b>in-line</b> $(P_1, A_2)$	2	0	Der Punkt $P_1$ soll auf der Achse $A_2$ liegen.
<b>in-plane</b> $(P_1, E_2, d)$	1	0	Der Punkt $P_1$ soll in der Ebene parallel zu $E_2$ mit der Entfernung $d$ , $d \in \mathbb{R}$ , liegen, wobei die Entfernung in Richtung der Normalen von $E_2$ gemessen wird.
<b>offset-x</b> $(K_1, K_2, \beta)$	0	3	Das Skalarprodukt der z-Vektoren der beiden Koordinatensysteme $K_1$ und $K_2$ soll gleich eins sein und der Winkel des x-Vektors von $K_1$ zum x-Vektor von $K_2$ gleich $\beta$ .
<b>parallel-z</b> $(V_1, V_2, B)$	0	2	Das Skalarprodukt der Vektoren $V_1$ und $V_2$ soll bei $B=\text{TRUE}$ gleich eins sein und bei $B=\text{FALSE}$ gleich minus eins.
<b>offset-z</b> $(V_1, V_2, \alpha)$	0	1	Der Winkel zwischen den Vektoren $V_1$ und $V_2$ soll $\alpha$ betragen, wobei $0 < \alpha < \pi$ .
<b>identical</b> $(K_1, K_2, T)$	3	3	Koordinatensystem $K_1$ soll starr mit dem Koordinatensystem $K_2$ durch die Transformation $T$ verbunden sein. Die Beschreibung von $T$ kann z.B. erfolgen durch einen Translationsvektor und entweder eine Rotationsmatrix bzw. KARDAN- oder EULER-Winkel.
<b>halfspace</b> $(P_1, E_2, d, B)$	-	-	Der Punkt $P_1$ soll für $B=\text{TRUE}$ eine Entfernung größer oder gleich und für $B=\text{FALSE}$ eine Entfernung kleiner oder gleich $d$ , $d \in \mathbb{R}$ , von der Ebene $E_2$ haben, wobei die Entfernung gemessen wird in Richtung der Normalen von $E_2$ .
<b>signum-z</b> $(V_1, V_2, \alpha, B)$	-	-	Das Skalarprodukt der Vektoren $V_1$ und $V_2$ soll bei $B=\text{TRUE}$ größer oder gleich und bei $B=\text{FALSE}$ kleiner oder gleich $\cos \alpha$ sein, $0 < \alpha < \pi$ .

Tabelle 2: Verwendete geometrische Bindungen

Bild 1 zeigt beispielhaft den Constraintgraphen für zwei Quader, die mittels dreier **coincident**-Bindungen zueinander starr fixiert werden. Die geometrischen Bindungen bestehen jeweils zwischen den zwei Bezugsobjekten Punkt  $P_{1,i}$  und  $P_{2,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  bezeichnen die Körperkoordinatensysteme der jeweiligen Quader.

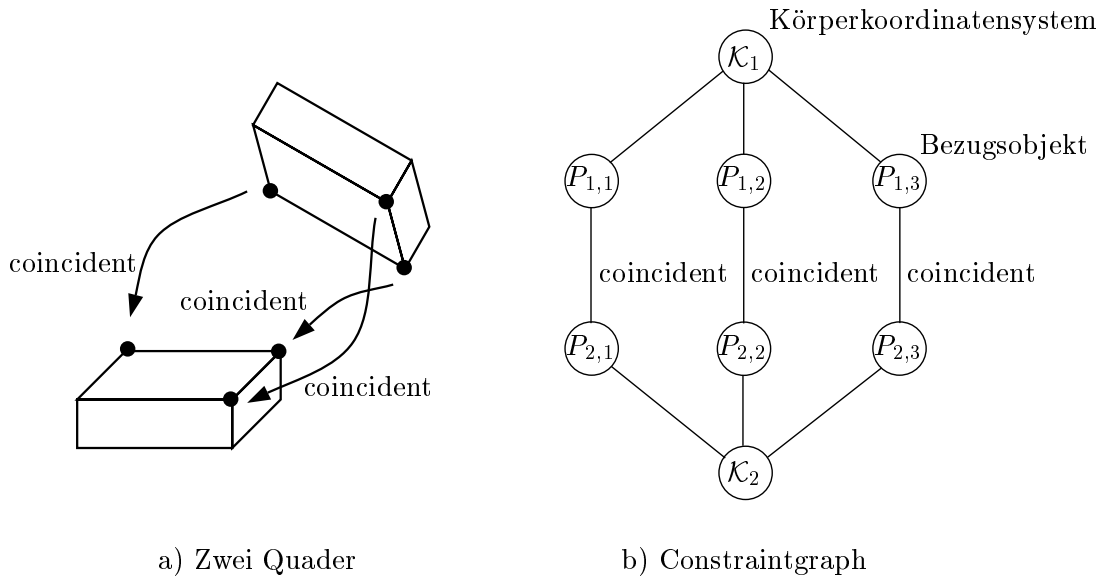


Bild 1: Beispiel eines Constraintgraphen

## 2 Mehrkörpermodellierung

Für die Berechnung von Bewegungen in komplexen mechanischen Systemen eignen sich die Methoden der Mehrkörpersysteme. Hierbei betrachtet man eine Menge von *starrten Körpern*, die durch *Gelenke* miteinander verbunden sind.

*Gelenke* und *starre Verbindungen* stellen geometrische Verbindungen zwischen jeweils zwei Körpern bzw. zwischen zwei Anlenkpunkten zweier Körper her. Ein Gelenk erlaubt eine Relativbewegung, die sich entsprechend der Anzahl der Gelenkfreiheitsgrade durch die Gelenkvariablen  $\underline{\beta}_G = [\beta_1, \dots, \beta_{f_G}]^T$  beschreiben läßt. Besondere Bedeutung haben dabei die „Elementargelenke“ *Schubgelenk* und *Drehgelenk* mit jeweils *einem Gelenkfreiheitsgrad*, die eine Translation bzw. eine Rotation bezüglich einer Gelenkachse zulassen. Die Gelenkvariable repräsentiert hier die entsprechende Verschiebung bzw. den entsprechenden Drehwinkel. Die meisten gebräuchlichen Gelenke lassen sich i.a. mit Hilfe dieser Elementargelenke erzeugen. Eine *starre Verbindung* beschreibt eine räumliche Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes.

Die Modellierung von Gelenken kann entweder explizit oder implizit erfolgen. Bei der expliziten Darstellung wird eine Übertragungsgleichung der Form

$$\mathcal{K}_r = \varphi_G(\mathcal{K}_\ell; \underline{\beta}) \tag{1}$$

zwischen den Anlenksystemen  $\mathcal{K}_\ell$  des einen und  $\mathcal{K}_r$  des anderen der beiden durch das Gelenk verbundenen Körper aufgestellt. Wenn die Lage von  $\mathcal{K}_\ell$  bekannt ist und die Gelenkvariablen  $\underline{\beta}$  vorgegeben werden, kann man daraus die Lage von  $\mathcal{K}_r$  explizit angeben. Analoges gilt für die starre Verbindung, die allerdings keine Gelenkvariablen in der Gleichung enthält.

Im Gegensatz zu (1) kann man die geometrischen Abhängigkeiten zwischen zwei Koordinatensystemen  $\mathcal{K}_\ell$  und  $\mathcal{K}_r$  auch implizit durch Aufstellen von  $r_G$  skalaren Bindungsgleichungen

$$\phi_\lambda(\mathcal{K}_\ell, \mathcal{K}_r) = 0, \quad \lambda = 1, \dots, r_G. \quad (2)$$

vorgeben. Zwischen der Anzahl  $r_G$  der skalaren Bindungsgleichungen und dem Gelenkfreiheitsgrad  $f_G$  gilt der Zusammenhang  $r_G = 6 - f_G$ . Je nach Anzahl von Gelenkfreiheitsgraden kann also die explizite oder die implizite Formulierung günstiger sein, z.B. ergibt sich für ein Dreh- bzw. Schubgelenk  $f_G = 1$  Gelenkfreiheitsgrad und  $r_G = 5$  Bindungsgleichungen. In diesem Fall ist die explizite Formulierung also wesentlich günstiger.

Treten in einem System sog. „*kinematische Schleifen*“ von Körpern auf, ist eine rein explizite Modellierung nicht mehr möglich, da nicht mehr für jedes Gelenk eindeutig ein Eingangs- und ein Ausgangs-Koordinatensystem charakterisiert werden kann. Es müssen in diesen Fällen *Schließbedingungen* aufgestellt und i.a. numerisch iterativ aufgelöst werden.

### 3 Abbildung des Constraintgraphen auf die Mehrkörperstruktur

Um die Bewegung eines CAD-Zusammenbaus mit Methoden der Mehrkörpersysteme zu simulieren, muß der Constraintgraph auf eine geeignete Mehrkörperstruktur abgebildet werden. Hierbei gilt es, die aus dem CAD-System stammenden geometrischen Bindungen (CAD-Bindungen) auf geeignete Mehrkörpererelemente zurückzuführen. Zum einen gelingt dies durch die Verwendung von *Gelenken* und *starrten Verbindungen* im Sinne einer expliziten Formulierung nach Gleichung (1), zum anderen durch die Verwendung von Bindungsgleichungen und -ungleichungen (MKS-Bindungen) im Sinne einer impliziten Formulierung nach Gleichung (2).

Während bei CAD-Systemen nur die Lage und die Körperzugehörigkeit von geometrischen Bezugsobjekten von Bedeutung ist, ist es bei MKS-Modellierungen erforderlich, für jedes Anlenkobjekt ein eigenes Anlenkkoordinatensystem anzuführen. Darum müssen die Bezugsobjekte aus Tabelle 1 durch entsprechende Koordinatensysteme ausgedrückt werden; ein Bezugsobjekt Punkt wird dabei charakterisiert durch den Ursprung eines Koordinatensystems, ein Bezugsobjekt Vektor durch die z-Koordinatenachse. Entsprechendes gilt für die anderen Bezugsobjekte, da sie aus Punkten und Vektoren zusammengesetzt sind. Die Beziehung vom jeweiligen Körperkoordinatensystem zum Bezugsobjekt kann beschrieben werden durch eine *starre Verbindung*.

#### 3.1 Abbildung von CAD-Bindungen auf MKS-Bindungen

Jede geometrische Bindung kann durch eine Kombination von MKS-Bindungsgleichungen und -ungleichungen beschrieben werden. MKS-Bindungen lassen sich auf Kombinationen der drei in Tabelle 3 angegebenen elementaren skalaren Bindungen zurückführen.

Die verwendeten drei Arten einer Bindungsgleichung entstehen aus der Forderung, daß bestimmte geometrische Größen, die abhängig von der Lage der beiden an der geometrischen Bindung

beteiligten Koordinatensysteme  $\mathcal{K}_\ell$  und  $\mathcal{K}_r$  sind, einen vorgegebenen Wert („*Offset*“) annehmen sollen. Die Ungleichungen der einseitigen Bindungen ergeben sich dadurch, daß die entsprechenden geometrischen Größen minus dem Offset größer oder gleich null sein sollen. Tabelle 3 zeigt die verwendeten geometrischen Größen und ihre Berechnung.

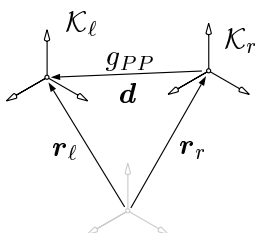
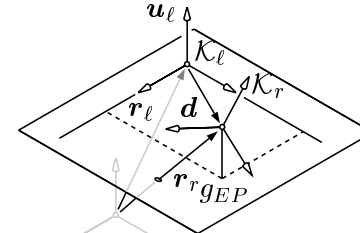
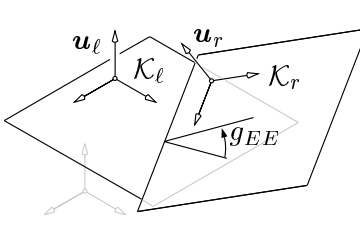
Quadrat des Abstandes zweier Punkte (Punkt-Punkt)	Abstand eines Punktes von einer Ebene (Punkt-Ebene)	Kosinus des Winkels zwischen zwei Ebenen (Ebene-Ebene)
 $g_{PP} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = \ \mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_r\ ^2$	 $g_{EP} = \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{d} = \mathbf{u}_\ell \cdot (\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_\ell)$	 $g_{EE} = \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_r$

Tabelle 3: geometrische Größen für die Bindungsgleichungen

Tabelle 4 gibt an, auf welche Kombination von Bindungsgleichungen und -ungleichungen die CAD-Bindungen abgebildet werden. Die CAD-Bindung **identical** läßt sich implizit aus der Kombination von **coincident** und **offset-x** bilden und führt dann zu einem redundanten System von sieben Gleichungen und einer Ungleichung, aus denen sämtliche Variablen eindeutig bestimmt werden können. Aus Effizienzgründen sollte die CAD-Bindung **identical** jedoch stets durch eine *starre Verbindung* dargestellt werden, weshalb sie in Tabelle 4 nicht aufgenommen ist.

Die beiden an einer Bindungsgleichung bzw. -ungleichung beteiligten Koordinatensysteme sind indiziert mit der Bezeichnung des ursprünglichen Bezugsobjektes nach Tabelle 1, dann folgt der jeweilige Offset, und bei den Bindungsgleichungen und -ungleichungen Punkt-Ebene und Ebene-Ebene die Information, welche Koordinatenachsen die Normalenvektoren der verwendeten Koordinatenebenen sind.

### 3.2 Abbildung von CAD-Bindungen auf Gelenkkonfigurationen

Neben der Abbildung der CAD-Bindungen auf MKS-Bindungen ist auch eine Abbildung auf entsprechende Gelenkkonfigurationen möglich, siehe Tabelle 5. Hierbei sind zwei Probleme zu lösen: die Starrkörperidentifikation und die Gelenkidentifikation.

Der Sinn einer Starrkörperidentifikation besteht darin, Koordinatensysteme, die eine unveränderliche Lage zueinander haben, zu einem einzigen „*Starrkörper*“ mit einem seine Lage charakterisierenden Referenzsystem zusammenzufassen. Verbindet man alle in einem Starrkörper zusammengefaßten Koordinatensysteme durch *starre Verbindungen* mit dessen Referenzsystem, kennt

CAD-Bindung	x-seitig, Bindungsgleichungen und -ungleichungen
<b>coincident</b> ( $P_1, P_2$ )	2, Punkt-Ebene( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{P_2}, 0, x$ -Achse) 2, Punkt-Ebene( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{P_2}, 0, y$ -Achse) 2, Punkt-Ebene( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{P_2}, 0, z$ -Achse)
<b>distance</b> ( $P_1, P_2, d$ )	2, Punkt-Punkt( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{P_2}, d^2$ )
<b>in-line</b> ( $P_1, A_2$ )	2, Punkt-Ebene( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{A_2}, 0, x$ -Achse) 2, Punkt-Ebene( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{A_2}, 0, y$ -Achse)
<b>in-plane</b> ( $P_1, E_2, d$ )	2, Punkt-Ebene( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{E_2}, d, z$ -Achse)
<b>offset-x</b> ( $K_1, K_2, \beta$ )	2, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{K_1}, \mathcal{K}_{K_2}, 0, z$ -Achse, $x$ -Achse) 2, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{K_1}, \mathcal{K}_{K_2}, 0, z$ -Achse, $y$ -Achse) 1, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{K_1}, \mathcal{K}_{K_2}, 0, z$ -Achse, $z$ -Achse) 2, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{K_1}, \mathcal{K}_{K_2}, \cos \beta, x$ -Achse, $x$ -Achse) 2, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{K_1}, \mathcal{K}_{K_2}, -\sin \beta, x$ -Achse, $y$ -Achse)
<b>parallel-z</b> ( $V_1, V_2, \text{TRUE}$ )	2, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{V_1}, \mathcal{K}_{V_2}, 0, z$ -Achse, $x$ -Achse) 2, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{V_1}, \mathcal{K}_{V_2}, 0, z$ -Achse, $y$ -Achse) 1, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{V_1}, \mathcal{K}_{V_2}, 0, z$ -Achse, $z$ -Achse)
<b>offset-z</b> ( $V_1, V_2, \alpha$ )	2, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{V_1}, \mathcal{K}_{V_2}, \cos \alpha, z$ -Achse, $z$ -Achse)
<b>halfspace</b> ( $P_1, E_2, d, \text{TRUE}$ )	1, Punkt-Ebene( $\mathcal{K}_{P_1}, \mathcal{K}_{E_2}, d, z$ -Achse)
<b>signum-z</b> ( $V_1, V_2, \alpha, \text{TRUE}$ )	1, Ebene-Ebene( $\mathcal{K}_{V_1}, \mathcal{K}_{V_2}, \cos \alpha, z$ -Achse, $z$ -Achse)

Tabelle 4: Abbildung der CAD-Bindungen auf Bindungsgleichungen und -ungleichungen

man ihre Lagen, falls die des Referenzsystems bekannt ist. Somit beschränkt sich die Berechnung der Lage aller Bauteile einer CAD-Konstruktion auf die Berechnung der Lage der einzelnen Starrkörper bzw. deren Referenzsysteme.

Starrkörper setzen sich i.a. zusammen aus den Körperkoordinatensystemen einzelner Bauteile, die fest miteinander verbunden sind, und den dazu gehörenden Anlenkkoordinatensystemen, die von Bezugsobjekten abgebildet werden. Als Referenzsystem eines Starrkörpers bietet sich dann eines der in ihm enthaltenen Körperkoordinatensysteme an.

Bei der Gelenkidentifikation führt man zunächst je CAD-Bindung eine entsprechende Gelenkette ein und „friert“ die nicht beweglichen Freiheitsgrade aufgrund weiterer Bindungsgleichungen ein. Obwohl das Problem der vollständigen Gelenkidentifikation, d.h. der Erkennung von einzelnen elementaren Freiheitsgraden aus mehreren parallelen CAD-Bindungen, i.a. nicht geschlossen bzw. grundsätzlich nicht lösbar ist, gelingt es für 80% der technisch relevanten Fälle, recht schnell eines der elementaren Gelenke zu identifizieren.

### 3.3 Strategien für die globale Mehrkörpersystem-Modellierung

Die beiden obengenannten Abbildungskonzepte für CAD-Bindungen lassen sich verschiedentlich nutzen.

Auf der einen Seite ist es denkbar, sämtliche CAD-Bindungen auf MKS-Bindungen abzubilden („rein implizite“ Formulierung). Hierbei werden je Starrkörper sechs Freiheitsgrade gegenüber

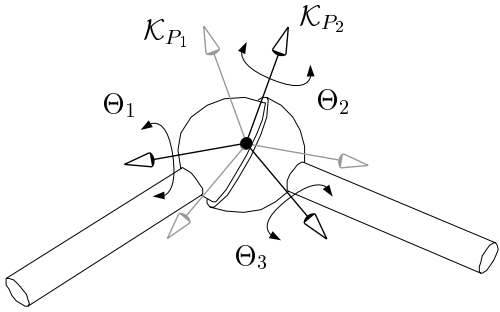
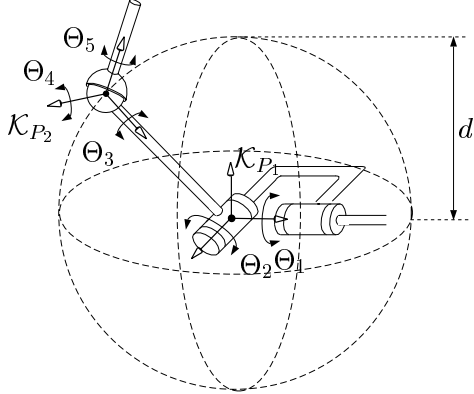
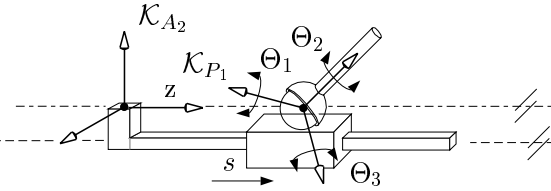
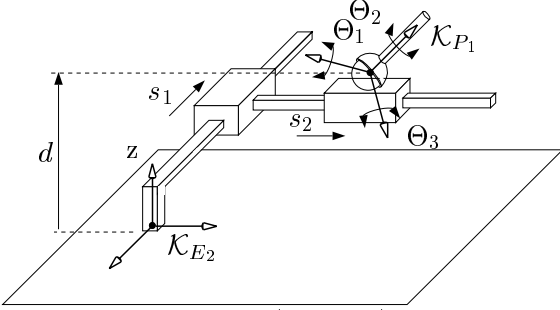
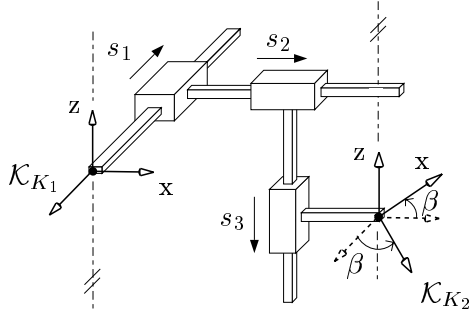
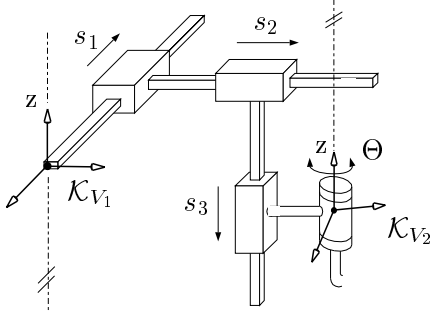
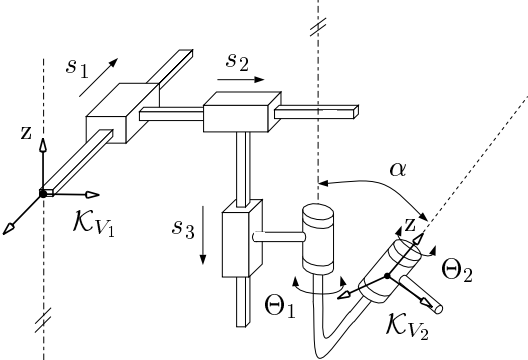
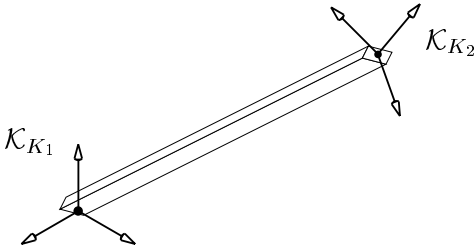
 <p><b>coincident</b>(<math>P_1, P_2</math>)</p>	 <p><b>distance</b>(<math>P_1, P_2, d</math>)</p>
 <p><b>in-line</b>(<math>P_1, A_2</math>):</p>	 <p><b>in-plane</b>(<math>P_1, E_2, d</math>)</p>
 <p><b>offset-x</b>(<math>K_1, K_2, \beta</math>)</p>	 <p><b>parallel-z</b>(<math>V_1, V_2, \text{TRUE}</math>)</p>
 <p><b>offset-z</b>(<math>V_1, V_2, \alpha</math>)</p>	 <p><b>identical</b>(<math>K_1, K_2, \text{„Transformation“}</math>)</p>

Tabelle 5: Abbildung der CAD-Bindungen auf Gelenkkonfigurationen

dem Inertialsystem als Beschreibungsvariablen eingeführt und daraus  $r$  abhängige Variablen aus den  $r$  resultierenden Bindungsgleichungen ermittelt.

Auf der anderen Seite kann man eine rein explizite Formulierung anstreben, bei der sämtliche Abhängigkeiten zwischen den Bewegungen der Starrkörper geschlossen modelliert werden.

Bei der rein impliziten Formulierung ist der Aufstellungsaufwand gering, es entstehen jedoch hohe Rechenzeiten (vgl. Abschnitt 5). Dagegen bietet die explizite Formulierung sehr schnellen Code, erfordert jedoch sehr umfangreiche Softwaremodule und hohe Rechenzeit für die Gelenkerkennung bzw. Schleifenlösung und ist zudem nicht allgemein anwendbar.

Insgesamt bietet sich eine „gemischte“ Abbildung von CAD-Bindungen auf MKS-Bindungen *und* Gelenke an. Dabei wird in dem Fall, wo mehrere CAD-Bindungen zwischen zwei Starrkörpern definiert sind, diejenige auf die zugehörige Gelenkkonfiguration nach Tabelle 5 abgebildet, die die meisten Freiheitsgrade einschränkt (üblicherweise **coincident** oder **offset-x**). Mit dieser Gelenkkette werden dann die beiden Starrkörper verbunden. Somit brauchen diese Freiheitsgrade nicht mehr durch Bindungsgleichungen und -ungleichungen eingeschränkt zu werden. Die anderen CAD-Bindungen werden auf solche abgebildet und numerisch iterativ erfüllt, indem die Werte für die Gelenkvariablen der Gelenkkette entsprechend berechnet werden.

Bei der Verwendung von Gelenken können kinematische Schleifen entstehen, die aufgeschnitten und an der Schnittstelle wiederum iterativ numerisch geschlossen werden müssen. Dies geschieht am effektivsten dort, wo die wenigsten Schließbedingungen aufgestellt werden müssen. Eine automatische Erkennung der optimalen Schnittstelle einer Schleife ist hierbei möglich durch den Einsatz des Algorithmus zur Bestimmung des „*minimal spannenden Baumes*“ eines Graphen [GoMi86], dessen Knoten die einzelnen Starrkörper eines Systems repräsentieren und dessen Kanten die dazwischen existierenden Gelenke bzw. Gelenkketten.

Werden die Kanten des Graphen mit der Anzahl der Gelenkvariablen pro Gelenk bzw. Gelenkkette *gewichtet*, enthält der durch den Algorithmus ermittelte *minimal spannende Baum* des Graphen als Kanten die Gelenkverbindungen mit den wenigsten Freiheitsgraden zwischen den Starrkörpern bei Vermeidung von Schleifen. Die in diesem Baum nicht enthaltenen Kanten des Graphen („*Ko-Baum*“) sind dann die optimalen „Schließstellen“ einer Schleife. Sie werden je nach Gelenk durch entsprechende MKS-Bindungen modelliert.

## 4 Numerische Lösung der resultierenden Gleichungen

Zur Lösung des gemischten Systems von zweiseitigen und einseitigen Bindungen, welches auch *redundant* sein kann — d.h. es gibt es mehr Gleichungen als Unbekannte — eignet sich ein *Least-Squares-Verfahren* [GMW81] mit Berücksichtigung von nichtlinearen Ungleichungen. Man löst hierbei das Minimierungsproblem:

$$\text{Minimiere}_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} \quad F(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{f}(\underline{x})^T \underline{f}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i^2(\underline{x}), \quad m \geq n$$



unter der Berücksichtigung von

$$\underline{c}(\underline{x}) \geq 0. \quad (3)$$

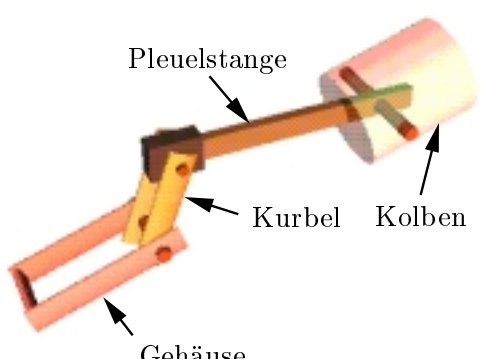
Hierbei ist  $\underline{x}$  der Vektor der Unbekannten,  $\underline{f}(\underline{x})$  die Vektorfunktion der zweiseitigen Bindungen  $\underline{f}(\underline{x}) = 0$  und  $\underline{c}(\underline{x})$  die Vektorfunktion der einseitigen Bindungen  $\underline{c}(\underline{x}) \geq 0$ . Zur Lösung von (3) benötigt das Verfahren neben der Berechnung von  $\underline{f}(\underline{x})$  und  $\underline{c}(\underline{x})$  auch die zugehörigen JACOBI-Matrizen

$$\mathbf{J}_x = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \quad \text{und} \quad \mathbf{J}_x^{(c)} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{x}} \quad (4)$$

an einer Stelle  $\underline{x}$ . Diese lassen sich günstigerweise „kraftgestützt“ mit der Methode der „*kinematischen Differentiale*“ berechnen [Kecs93].

## 5 Anwendungsbeispiele

Die oben beschriebenen Verfahren wurden mit zwei Anwendungsbeispielen getestet. Beim ersten Beispiel handelt es sich um einen *Einzylindermotor*, welcher einem RRRP-Mechanismus mit einem Freiheitsgrad entspricht. Gehäuse und Kurbel, Kurbel und Pleuelstange sowie Pleuelstange und Kolben sind jeweils durch Drehgelenke verbunden; die Abhängigkeit zwischen Gehäuse und Kolben kann durch ein Schubgelenk beschrieben werden. In Bild 2 ist der Einzylindermotor und eine Beschreibung der Gelenke durch (teilweise redundante) geometrische Bindungen dargestellt.



Bauteile	geom. Bindungen
Gehäuse/Kurbel (Drehgelenk)	<b>in-line</b> ( $P_{12}, A_{22}$ ) <b>parallel-z</b> ( $V_{12}, V_{22}, B$ ) <b>in-plane</b> ( $P_{11}, E_{21}, d$ ) <b>parallel-z</b> ( $V_{11}, V_{21}, B$ )
Kurbel/Pleuelstange (Drehgelenk)	<b>coincident</b> ( $P_{23}, P_{31}$ ) <b>parallel-z</b> ( $V_{23}, V_{31}, B$ )
Pleuelstange/Kolben (Drehgelenk)	<b>coincident</b> ( $P_{32}, P_{41}$ ) <b>parallel-z</b> ( $V_{32}, V_{41}, B$ )
Kolben/Gehäuse (Schubgelenk)	<b>in-line</b> ( $P_{42}, A_{13}$ ) <b>parallel-z</b> ( $V_{42}, V_{13}, B$ ) <b>offset-x</b> ( $K_{42}, K_{13}, \beta$ )

Bild 2: Modell des Einzylindermotors und zugehörige geometrische Bindungen

Die Bewegungssimulation umfaßt eine rein implizite Abbildung der geometrischen Bindungen auf Bindungsgleichungen und -ungleichungen nach Abschnitt 3.1 und die Wiedergabe der entsprechenden Grafiken der Bauteile am Bildschirm. Der Benutzer kann dabei den Winkel zwischen Gehäuse und Kurbel durch einen Schieberegler steuern. Für die Simulation werden 18 Unbekannte, die die Lage der drei beweglichen Bauteile beschreiben, aus 29 zweiseitigen und 7 einseitigen Bindungen bestimmt; das System ist somit 11-fach überbestimmt.

Das zweite Beispiel ist ein *Sternmotor*, den man sich kinematisch als einen „siebenfachen Einzylindermotor“ vorstellen kann. Er besteht aus sieben unabhängigen kinematischen Schleifen und hat einen Freiheitsgrad. Bei diesem System zeigt sich, daß die *rein implizite* Abbildung von geometrischen Bindungen auf Bindungsgleichungen und -ungleichungen wegen der dabei sehr hohen Rechenzeit bei der Bestimmung einer Lage des Systems für eine schnelle Simulation keine zufriedenstellende Lösung darstellt. Die Modellierung erfolgte deshalb alternativ unter Verwendung *expliziter Gelenke*.

Tabelle 6 enthält die Ausführungszeiten für 500 Lageberechnungen, wobei der Winkel zwischen Gehäuse und Kurbel den Bereich von 0 bis 360 Grad in 500 aquidistanten Schritten durchläuft. Neben der Zeit für das explizite Modell sind auch die Zeiten für eine implizite Berechnung von ein bis drei Schleifen des Systems angegeben.

Modell	Anzahl 1(2)-seitiger Bindungen/Unbekannte	Zeit
explizit	14(0)/14	32.0 sec.
1 Schleife	25(5)/18	52.3 sec.
2 Schleifen	41(8)/30	133.9 sec.
3 Schleifen	57(11)/42	304.9 sec.

Tabelle 6: Rechenzeiten für den Sternmotor

Die sich bei den zwei und besonders drei Schleifen ergebenden hohen Rechenzeiten sind hauptsächlich auf die lange Suchzeit für die erste Stellung zurückzuführen. Ein Experimentieren mit dem Startwert des Iterationsverfahrens könnte hier Abhilfe schaffen. Allerdings bleibt die Bewegungssimulation auch auf leistungsfähigen Workstations dabei sehr ruckhaft.

Dieses Beispiel verdeutlicht den immensen Geschwindigkeitsvorteil bei der Verwendung von *expliziten Gelenken* im Gegensatz zu einer *rein impliziten* Behandlung komplexer Systeme. Auch erhöht sich so die Genauigkeit der berechneten Lösung, und es entfallen numerische Probleme, die sich zwangsläufig bei der Lösung „großer“ Gleichungssysteme ergeben, wie etwa die Berechnung einer Lösung bei schlechten Startwerten.

## 6 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei Möglichkeiten für die Umwandlung der zwischen den Bauteilen einer CAD-Konstruktion definierten geometrischen Bindungen in eine entsprechende *Mehrkörperstruktur* vorgestellt, eine „implizite“ unter Verwendung von Bindungsgleichungen und -ungleichungen und eine „explizite“ unter Verwendung von Gelenken. Die Anwendung dieser Methoden auf das komplexe System eines Sternmotors zeigt, daß es für größere Systeme sinnvoll ist, *Gelenke* für die Beschreibung der Abhängigkeiten einer CAD-Konstruktion im Sinne einer Mehrkörperstruktur zu verwenden, da somit die Zeit für die Berechnung der Kinematik des Systems erheblich gesenkt werden kann und numerische Probleme beim Einsatz iterativer Verfahren vermieden oder zumindest „klein“ gehalten werden können. Sinnvoll wäre die Einführung *kinematischer geometrischer Bindungen* als „feature“ von Seiten des CAD-Systems,

da somit Kombinationen von geometrischen Bindungen, die zusammen ein Gelenk beschreiben, effizient verarbeitet werden könnten.

## Danksagung

Die finanzielle Unterstützung der vorliegenden Arbeit durch die Fa. Precisionsoft AG, Au/Zürich, wird dankend anerkannt.

## Literatur

- [GMW81] Gill P. E., Murray W., Wright M. H., *Practical Optimization*, Academic Press, London New York Toronto Sidney San Francisco, 1981.
- [GoMi86] Gondrean M., Minoux M., *Graphs And Algorithms*, Wiley-Interscience Series In Discrete Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [Kecs93] Kecskeméthy A., *Objektorientierte Modellierung der Dynamik von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen*, Dissertation, VDI-Fortschrittberichte, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf, 1993.
- [Klei96] Klein St. *Automatisches Aufstellen und Lösen der kinematischen Gleichungen von CAD-Zusammenbauten unter Nutzung von Constraintgraphen*, Diplomarbeit, Gerhard-Mercator-Universität — GH Duisburg, 1996.
- [Kram92] Kramer G. A., *Solving Geometric Constraint Systems: A Case Study In Kinematics*, The-Massachusetts-Institute-Of-Technologie-Press, Cambridge, Massach., 1992.
- [Seyb97] Seybold B., Metzger F., Ogan G., Bathelt J., Collenberg F., Taiber J., Simon K., Engeli M., Spatial Modelling with Geometric Constraints, in *Proceedings, PACT 97*, Seiten 307-320, 1997.
- [Shah90] Shah J. J., The Design of Design Environments, in *Computers in Engineering*, Seiten 281-288, ASME, 1990.